DISTRIBUTIONS

A la fin des années 1920 le grand physicien britannique P.A.M. Dirac a introduit la célèbre "fonction" δ, définie par:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 .$$

Il n'y a pas de sens de cette définition du point de vue mathématique. En effet, Dirac lui-même comprenait qu'il ne s'agissait pas d'une fonction au sens habituel du terme. Il est pourtant indéniable le succès de cet outil chez les physiciens et ingénieurs. Quand une telle situation contradictoire se présente, il en résulte une théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme quelque peu modifiée, leur langage. La théorie des distributions a été développée par Laurent Schwartz en 1945 pour mettre la rigeur mathématique au calcul symbolique. Il a introduit la notion de 'fonctions généralisées', auxquelles on peut étendre un certain nombre de concepts d'analyse.

Une des manières de se convaincre de l'utilité et même de la nécessité d'une telle extension est d'avoir une réflexion critique sur l'utilisation des fonctions en physique: Il est évident que les valeurs ponctuelles de celles-ci sont inaccessibles à l'expérience.

En effet, un appareil de mesure ne pourra jamais fournir la valeur $f(x_0)$ d'une fonction en un point. Le mieux que l'on puisse espérer est de nous fournir une moyenne pondérée

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (1)$$

au lieu de $f(x_0)$, où la fonction φ caractérise l'appareil ayant un support 'proche' de x_0.

Il apparait donc raisonnable de considérer comme importantes les quantités définies par (1), où φ parcourt l'espace $\mathcal{C}_0^\infty$, et de faire passer au second plan les valeurs ponctuelles de f. Ce changement de point de vue en induit d'autres:

1) Il faut se limiter à des fonctions $f \in L^1_{loc}$ pour donner un sens aux expressions comme (1).

2) Il est raisonnable d'identifier deux fonctions f et g égales p.p.

3) La "vieille" notion de convergence ponctuelle:

$$f_j(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall j \in I$$

doit céder la place à la suivante:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty : \langle f_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle$$

qui représente la convergence des quantités <u>accessibles à l'expérience</u>.

I. Définition des Distributions: Espaces $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}'$

A l'origine de la théorie des distributions est le choix d'un espace topologique, appelé <u>espace des fonctions test</u>, noté $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nous choisissons cet espace pour doter son dual (i.e., espace de formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$), $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de la richesse maximale en éléments, ainsi qu'en propriétés de ces éléments.

<u>D'abord, quelques rappels:</u>

1) Soit E un espace vectoriel complexe. On appelle une <u>forme linéaire</u> sur E une application

$$T : E \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longrightarrow T(\varphi) := \langle T, \varphi \rangle$$

qui satisfait

$$\langle T, \lambda\varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

Dans un e.v.n. la continuité d'une forme est liée à la norme qui définit la topologie de E: On dit que la forme T est <u>continue</u> si

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0 \quad \text{quand} \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 0.$$

Mais il y a des e.v. topologiques E qui ne sont pas des e.v.n.; la topologie de ces espaces est définie par la notion de convergence d'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E$ vers une limite $\varphi \in E$ quand $n \to \infty$, i.e., par la définition du symbole $\underset{n\to\infty}{\text{LIM}} \varphi_n = \varphi$:

Définition: Une forme linéaire T sur un e.v. topologique est dite **continue** si

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0 \quad \text{quand} \quad \underset{n\to\infty}{\text{LIM}}\, \varphi_n = 0.$$

Remarque: La relation $\underset{n\to\infty}{\text{LIM}}\, \varphi_n = \varphi$ signifie que:

a) Les supports des φ_n sont tous contenus dans un même ensemble borné, K, indépendant de n.

b) Les dérivées $D^\alpha \varphi_n$ de tout ordre α de φ_n **convergent uniformément** vers les dérivées correspondantes de φ.

Ici, nous utilisons la notation suivante: Soit α un ensemble ordonné de k entiers naturels:

$$\alpha = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}.$$

Nous posons

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Si $x = \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbb{R}^k$, nous notons

$$x^\alpha = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}$$

De même, pour une dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$, nous écrirons:

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_k}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_k^{m_k}}$$

Définition: On appelle **support** d'une fonction $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ le plus petit ensemble fermé en dehors duquel $\varphi \equiv 0$.

Définition 1: On appelle espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, indéfiniment dérivables et à support borné.

Remarque: Le choix d'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ comme espace de fonctions test est simple: Il y a beaucoup de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support borné! Il en existe suffisamment pour que l'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ soit dense dans beaucoup d'espaces de fonctions.

Exemple: Si $n=1$, la fonction φ définie par:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Son support, $[-1,+1]$, est en effet borné. φ est $\mathcal{C}^\infty$ pour $|x|>1$, car elle est alors $\equiv 0$, et, pour $|x|<1$, comme exponentielle d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On montre donc qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ partout, avec toutes ses dérivées successives pour $x = \pm 1$ étant nulles.

Remarque: Le fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ soit un e.v. résulte du fait que si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\lambda\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. $\mathcal{D}(\Omega)$ est même une algèbre pour la multiplication ordinaire, car

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \varphi_1 \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Plus généralement, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ à support non nécessairement compact, alors $\varphi\psi \in \mathcal{D}$, et

$$\operatorname{supp}(\varphi\psi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(\psi).$$

Définition 2: On appelle distribution T toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$.

Remarque: D'après la Déf^{n} 1, la continuité de T implique que pour tout α:

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, D^{\alpha}\varphi_n \rangle = \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle \text{ si } \underset{n\to\infty}{LIM}\, \varphi_n = \varphi.$$

Définition 3: i) La somme de deux distributions T_1 et T_2 est une distribution, notée T_1+T_2 et, définie par

$$\langle T_1+T_2, \varphi \rangle := \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$$

ii) Le produit d'une distribution par un scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$ est la distribution notée αT, définie par

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle$$

iii) On appelle distribution nulle la distribution $T=0$ tq

$$\langle T, \varphi \rangle \equiv 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

iv) Deux distributions T_1 et T_2 sont égales ssi $T_1 - T_2$ est la distribution nulle.

Il résulte de cette définition que l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions, le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, est un espace vectoriel.

Exemples de distributions:

1) **Les distributions régulières:** On appelle distribution régulière T_f une distribution

définie par une fonction f:

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

sous réserve que l'intégrale soit convergente.

Toute fonction localement sommable, i.e. intégrable sur toute partie bornée de $\mathbb{R}^n$, définit une telle distribution. En effet, l'intégrale est étendue à un domaine borné K contenant $\mathrm{supp}(\varphi)$, et, puisque les fonctions continues à support borné sont bornées, $|\varphi(x)| \leq M$, et on a:

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq M \int_K |f(x)|\,dx < \infty,$$

ce qui prouve que T_f est définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Sa continuité se démontre par passage à la limite sous le signe intégrale, légitimé par la convergence uniforme dans les $\mathrm{supp}(\varphi_n)$.

En particulier, toute fonction continue, étant localement sommable, définit une distribution régulière.

Proposition: Deux fonctions localement sommables f et g définissent la même distribution régulière, $T_f = T_g$, ssi elles sont p.p. égales.

Remarque: Si $f = g$ p.p., il est évident que

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

C'est la réciproque qui est difficile à démontrer.

Conséquence: Si l'on convient d'identifier $f, g \in L^1_{loc}$ lorsqu'elles sont p.p. égales (ce qui

revient à ne parler que de <u>classes</u> de fonctions localement sommables), les distributions constituent une généralisation de la notion de fonction localement sommable. C'est pourquoi nous identifierons une fonction $f \in L^1_{loc}$, définie p.p., à la distribution T_f qu'elle définit, et nous écrirons:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Mais il y a des distributions, dites singulières, qui ne sont pas définies par des fonctions! En voici un exemple classique:

2) <u>La distribution de Dirac δ_a:</u>

La distribution de Dirac au point a de $\mathbb{R}^n$ est définie par:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

La distribution de Dirac au point 0 sera notée par δ.

Il est important de noter que la distribution de Dirac ne correspond à aucune fonction de L^1_{loc}.

<u>Remarque:</u> On trouve souvent les notations:

$$\delta_a = \delta(x-a); \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a).$$

Bien que le symbole $\delta(x-a)$ évoque abusivement la notion de fonction, il nous arrivera de l'utiliser au lieu de δ_a. Il faut cependant pas oublier que la formule intégrale pour représenter

$\langle \delta_a, \varphi \rangle$ est purement symbolique, et n'a, en aucun cas, le sens d'une intégrale.

Espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$: Nous introduirons, dans ce paragraphe, un espace de fonctions test $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [ainsi que son dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (espace de distributions tempérées)] qui joue un rôle essentiel dans la théorie des distributions en vertu de ses propriétés remarquables.

Définition 4: L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; ∞-ment dérivables et telles que:

$$(2) \qquad \|\varphi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

Remarques:

1) Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des fonctions qui décroissent + vite à l'infini que l'inverse de tout polynôme, ainsi que toutes leurs dérivées partielles. Par conséquent, on appelle souvent $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide.

2) Il résulte de la Déf^n 4 que ttes les dérivées d'une fonction dans $\mathcal{S}$ sont aussi des fonctions appartenant à $\mathcal{S}$.

3) Nous avons: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il résulte de plus de (2) que $x^\alpha D^\beta \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, et $\forall p \in \mathbb{N}^*$. En effet;

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|^p dx = \int_{|x| \le L} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|^p dx + \int_{|x| \ge L} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|^p dx$$

où $L > 1$. Le premier terme du second membre est une constante finie. Le deuxième peut s'écrire

sous la forme:

$$\int_{|x|\geq L} \frac{|x^{\alpha+\gamma} D^{\beta}\varphi(x)|^p}{|x|^{\gamma p}} dx \quad \text{où } \gamma=\{2,2,\dots,2\}$$

D'après (2), $|x^{\alpha+\gamma} D^{\beta}\varphi(x)|^p \leq C_2$
D'autre part, pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $|x|>1$, $|x|^{-\gamma p} \leq |x|^{-\gamma}$.
Donc, pour $L>1$, on a:

$$\int_{|x|\geq L} |x|^{-\gamma p} dx \leq \int_{|x|\geq L} |x|^{-\gamma} dx < \infty$$

$\therefore$ $x^{\alpha} D^{\beta}\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p\in\mathbb{N}^*$.

4) En particulier, tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$. $\Rightarrow$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in\mathbb{N}^*$.

5) Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est <u>deuse</u> dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (nous l'admettrons), et que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors <u>$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in\mathbb{N}^*$.</u>

6) On définit une topologie sur cet espace en disant que la suite de fonctions $(\varphi_n)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0, i.e. $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = 0$, si $\forall|\alpha|,|\beta|\in\mathbb{N}^*$ la suite de fonctions $(x^{\alpha}D^{\beta}\varphi_n)_{n\to\infty}^{\infty}$ converge vers 0, et cela <u>uniformément sur $\mathbb{R}^n$</u>.

<u>Définition 5:</u> On appelle <u>distributions tempérées</u> les formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

★ <u>Remarque:</u> Les distributions tempérées sont des distributions au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. En effet, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\supset\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et si (φ_n), $n\in\mathbb{N}$, est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sa convergence vers 0 au sens de $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$

sa convergence vers 0 au sens de $\mathcal{D}$. Donc, toute forme linéaire et continue sur $\mathcal{S}$ l'est aussi sur $\mathcal{D}$. Par conséquent, à l'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ correspond l'inclusion $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemples de distributions tempérées:

1) Distributions définies par les fonctions de $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{N}^*$:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \Rightarrow |\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|\,dx$$

Toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ étant bornee, $|\varphi(x)| \leq M$, et on a:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < \infty$$

$\Rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ est bien définie $\forall \varphi \in \mathcal{S}$. Cette forme est évidemment linéaire. Elle est continue car, si $(\varphi_n) \in \mathcal{S}$ est une suite $\longrightarrow 0$, alors $M_n = \sup|\varphi_n| \to 0$ et $\lim_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0$.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$:

En vertu de l'inégalité de Hölder:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|\,dx \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q$$

Puisque $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)\ \forall q \geq 1$, on a $|\langle f, \varphi \rangle| < \infty$. D'autre part,

$$\|\varphi_n\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x)|^q\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^l)^q |\varphi_n(x)|^q \frac{dx}{(1+|x|^m)^q}$$

$$\leq \sup_x \left[(1+|x|^m)|\varphi_n(x)|\right]^q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^m)^q} \quad \forall q \in \mathbb{N}^*,$$

il est possible de choisir $m \in \mathbb{N}^*$ pour que l'intégrale soit finie. Alors:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_q = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0,$$

ce qui prouve que la forme définie sur $\mathcal{S}$ par la fonction $f \in L^p$, $p>1$, est continue, et donc f définit une distribution tempérée régulière.

2) <u>Les fonctions localement sommables à croissance lente</u>: Il s'agit de l'ensemble de fonctions pour lesquelles $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq

$$|f(x)| \leq A|x|^n \quad \text{pour } |x| \to \infty, \quad A = C^{te} > 0$$

définit des distributions temperées. En effet, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifie, pour $|x| \to \infty$, une inégalité:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{B}{|x|^r}, \quad \forall r \in \mathbb{N}^*$$

Donc, il vient $|f(x)\varphi(x)| \leq \frac{K}{|x|^{r-n}}$ pour $|x| \to \infty$

On peut donc choisir r pour que $f(x)\varphi(x)$ soit soit sommable, i.e. $\langle f, \varphi \rangle$ soit défini $\forall \varphi \in \mathcal{S}$. La continuité de cette forme se vérifie comme dans l'exemple précédent.

<u>Remarque:</u> Le nom de "tempérée" évoque précisément la croissance lente à l'infini.

<u>Parité d'une distribution:</u>

Soit T_f une distribution régulière définie par une fonction f. Nous avons :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\varphi(-x)\,dx$$

Posons $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. $\therefore$ si f est paire ($f(x) = f(-x)$)

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \tilde{\varphi} \rangle$$

et si f est impaire:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx = -\langle T_f, \tilde{\varphi} \rangle.$$

Nous définirons par analogie la parité d'une distribution:

<u>Définition 6:</u> Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, et $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. On dit qu'une distribution T est:

<u>paire</u> si $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$

<u>impaire</u> si $\langle T, \varphi \rangle = -\langle T, \tilde{\varphi} \rangle$.

<u>Exemple:</u> La distribution de Dirac δ au point 0 est <u>paire</u>, puisque $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(0)$. La distribution δ_a, $a \neq 0$, se décompose en:

$$\delta_a = \underbrace{\frac{\delta_a + \delta_{-a}}{2}}_{\text{partie paire}} + \underbrace{\frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2}}_{\text{partie impaire}}$$

et elle n'est ni paire ni impaire.

II. <u>Opérations sur les distributions</u>

1) <u>Dérivée d'une distribution:</u> Soit f une fonction possédant une dérivée f' continue. Alors f' définit une distribution régulière:

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On peut intégrer par parties:

$$\langle f', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

Cet exemple sert de guide pour définir la dérivée d'une distribution:

Définition 7: Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On appelle dérivée de T par rapport à x_i la distribution T'_{x_i} définie par:

$$(3) \quad \langle T'_{x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Il résulte de cette définition la propriété remarquable suivante des distributions:

Théorème 8: Toute distribution est indéfiniment dérivable, et $\forall |\alpha| \in \mathbb{N}^*$:

$$(4) \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Démonstration: Soit $D^\alpha T$, $|\alpha| = 1$, une dérivée partielle du premier ordre de T par rapport à la variable x_i. Cette dérivée, étant une distribution, a une dérivée $D^\beta T$, $|\beta| = 2$, par rapport à la variable x_k, et d'après (3):

$$\langle D^\beta T, \varphi \rangle = -\langle D^\alpha T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle$$

$$= +\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_k} \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle T, D^\beta \varphi \rangle$$

On démontre ainsi par récurrence que T admet des dérivées de tous ordres définies par (4). ∎

Remarques:

1) On peut vérifier que si $T \in \mathcal{S}'$, toutes ses dérivées sont des distributions tempérées.

2) Dans le cas particulier des distributions à une dimension, nous noterons $T^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de T, et (4) s'écrit:

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle .$$

Exemple: La distribution de Dirac $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est ∞-ment dérivable, et

$$\langle \delta_a^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.1) Dérivation et formule des sauts

Lemme 9: Soit $I :=]a,b[\subset \mathbb{R}$ et T une distribution sur I vérifiant $T' = 0$. Alors $T = C^{te}$.

Démonstration: Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ tq $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)dx = 1$, et soit $\langle T, \chi \rangle = C = C^{te}$.

$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, la fonction g définie par:

$$g(x) := \varphi(x) - \chi(x) \int \varphi(y)dy$$

est dans $\mathcal{C}_0^\infty(I)$, et elle est de moyenne nulle:

$$\int g(x)dx = \int \varphi(x)dx - \underbrace{\int \chi(x)dx}_{=1} \int \varphi(y)dy = 0$$

Donc $f(x) := \int_{-\infty}^{x} g(y)dy \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, et elle vérifie

$$f'(x) = g(x).$$

On a donc :

$$0 = \langle -T', f\rangle = \langle T, f'\rangle = \langle T, g\rangle$$
$$= \langle T, \varphi\rangle - \underbrace{\langle T, \chi\rangle}_{=c} \int \varphi(y)\,dy$$
$$= \langle (T - c\mathbb{1}), \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow T = c = c^{te}. \quad \blacksquare$$

Lemme 10: Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Les solutions de l'éq^n $T' = f$ dans $\mathcal{D}'(I)$ sont les fonctions continues sur I de la forme :

$$T(x) = c^{te} + \int_c^x f(y)\,dy \qquad (c \in I)$$

Démonstration: Soit $c \in I$; d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction

$$g(x) = \int_c^x f(y)\,dy$$

est continue sur I, et d'après le Lemme 9, il suffit de vérifier qu'on a $g' = f$ dans $\mathcal{D}'(I)$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ la partie :

$$A = \{\{c < y < x\} \cup \{x < y < c\}\},$$

et $\varphi \in C^\infty_0(I)$. On obtient, par Fubini :

$$\langle g', \varphi\rangle = -\langle g, \varphi'\rangle$$
$$= -\int \left(\int_c^x f(y)\,dy\right) \varphi'(x)\,dx$$
$$= -\iint_A \operatorname{sgn}(y-c) f(y) \varphi'(x)\,dx\,dy$$

$$= -\int f(y)\,\mathrm{sgn}(y-c)\Big[\int_{(x,y)\in A} \varphi'(x)\,dx\Big]\,dy$$

$$= \int f(y)\,\varphi(y)\,dy,$$

d'où le résultat. ▨

Proposition: (Formule de sauts)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une fonction sur I dont la dérivée distributionnelle $g' \in L^1_{loc}(I)$. Pour tous points $a<b$ de I, on a l'identité suivante dans $\mathcal{D}'(I)$:

$$\frac{d}{dx}\big[\mathbb{1}_{]a,b[}\,g\big] = \mathbb{1}_{]a,b[}\,g' - g(b)\,\delta_b + g(a)\,\delta_a .$$

Démonstration: Posons $g' = f \in L^1_{loc}(I)$. D'après Lemme 1, nous avons

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(y)\,dy \quad \forall x \in I.$$

Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\Big\langle \frac{d}{dx}\big(\mathbb{1}_{]a,b[}\,g\big), \varphi \Big\rangle = -\int_a^b g(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_a^b \Big[g(a) + \int_a^x f(y)\,dy\Big]\varphi'(x)\,dx$$

$$= -g(a)\int_a^b \varphi'(x)\,dx - \int_a^b dx\,\varphi'(x)\int_a^x f(y)\,dy$$

$$= -g(a)\int_a^b \varphi'(x)\,dx + \int_a^b \Big[\int_a^x f(y)\,dy\Big](-\varphi'(x))\,dx$$

$$= g(a)\left[\varphi(a)-\varphi(b)\right] + \int_a^b dy\, f(y)\left[\int_y^b (-\varphi'(x))\,dx\right]$$

$$= g(a)\left[\varphi(a)-\varphi(b)\right] + \int_a^b dy\, f(y)\left[\varphi(y)-\varphi(b)\right]$$

$$= g(a)\left[\varphi(a)-\varphi(b)\right] + \int_a^b dy\, f(y)\varphi(y) - \varphi(b)\int_a^b dy\, g'(y)$$

$$= g(a)\left[\varphi(a)-\varphi(b)\right] - \varphi(b)\left[g(b)-g(a)\right] + \int_a^b dy\, f(y)\varphi(y)$$

$$= g(a)\varphi(a) - g(b)\varphi(b) + \int_a^b f(y)\varphi(y)\,dy$$

$$= \langle \delta_a g, \varphi\rangle - \langle \delta_b g, \varphi\rangle + \langle \mathbb{1}_{]a,b[} f, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\mathbb{1}_{]a,b[}\, g\right] \underset{\mathcal{D}'}{=} \delta_a g - \delta_b g + \mathbb{1}_{]a,b[}\, g' \quad \blacksquare$$

Dérivée au sens des distributions d'une fonction possédant des discontinuités de première espèce :

Supposons que f ne possède qu'un seul point de discontinuité de première espèce ; mettons au point $x=a$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,+a[$ et $]+a,+\infty[$; puis les limites

$$f(a^+) \equiv \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) \quad \text{et} \quad f(a^-) \equiv \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$$

existent donc, mais elles sont distinctes :

$$f(a^+) \neq f(a^-).$$

On définit le <u>saut de f en a</u> la quantité:

$$\sigma(f;a) := f(a^+) - f(a^-).$$

Calculons la dérivée de f au sens des distributions:

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$
$$= -\int_{-R}^{a^-} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a^+}^{+R} f(x)\varphi'(x)dx$$

où $\varphi \in \mathcal{D}([-R,+R])$. Une intégration par parties nous donne:

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -[\varphi(x)f(x)]_{-R}^{a^-} - [\varphi(x)f(x)]_{a^+}^{R}$$
$$+ \int_{-R}^{a^-} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{a^+}^{R} f'(x)\varphi(x)dx$$
$$= -\varphi(a)f(a) + \varphi(a^+)f(a^+) + \int_{-R}^{a^-} f'(x)\varphi(x)dx$$
$$+ \int_{a^+}^{+R} f'(x)\varphi(x)dx$$
$$= \varphi(a)(f(a^+) - f(a^-)) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$
$$= \sigma(f;a)\varphi(a) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \sigma(f;a)\langle \delta_a, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

On obtient donc: $\boxed{(T_f)' = T_{f'} + \sigma(f;a)\delta_a}$

Si f possède plusieurs points de discontinuité de première espèce, disons aux points $a_1, \dots, a_p$, alors:

$$\boxed{(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{p} \sigma(f;a_k)\delta_{a_k}}$$

3) Translatée d'une distribution: Soit τ_v l'opérateur de la translation v dans $\mathbb{R}^n$, tel que $(\tau_v f)(x) = f(x+v)$. Si T_f est une distribution régulière définie par la fonction f, nous noterons $\tau_v T_f$ la distribution définie par $\tau_v f$:

$$\langle \tau_v T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(y-v)\,dy = \langle T_f, \tau_{-v}\varphi \rangle$$

Nous définirons donc par analogie la translatée d'une distribution quelconque:

Définition 11: On appelle translatée d'une distribution T par la translation v, la distribution notée $\tau_v T$, et définie par:

$$\langle \tau_v T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-v}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Exemple: Considérons δ_a, la distribution de Dirac au point a:

$$\langle \tau_v \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \tau_{-v}\varphi \rangle = \varphi(a-v) = \langle \delta_{a-v}, \varphi \rangle$$

Comme ceci est vrai $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, nous avons:

$$\tau_v \delta_a = \delta_{a-v}$$

et, en particulier: $\tau_{-a}\delta = \delta_a$.

4) Produit d'une distribution par une fonction $\mathcal{C}^\infty$:

Le produit de deux distributions n'est pas bien défini en général. On peut cependant définir le produit de toute distribution par une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$:

Définition 12: Si T est une distribution et $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$, alors la distribution αT est définie par:

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle$$

En effet, ce nombre est bien défini car $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$.

Remarque: Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$. L'équation

$$(x-a)f(x) = 0 \;,\; a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \neq a;$$

donc $f(x) = 0$ p.p. Nous nous proposons d'étudier la relation analogue, $(x-a)T = 0$, pour les distributions:

Théorème 13: Une distribution T satisfait la relation $(x-a)T = 0$ ssi $T = C\delta_a$, $C = C^{te}$.

Remarque: Par conséquent, si l'on considère dans $L^2(\mathbb{R})$ l'éq^{n} $xf = af$, alors l'unique solution est une fonction $f = 0$ p.p., i.e. l'élément $f \equiv 0$ de $L^2(\mathbb{R})$, alors que cette même équation, au sens des distributions, admet les solutions $T = C\delta_a$. Cette différence est importante: elle trouve beaucoup d'applications dans l'étude des opérateurs linéaires différentiels sur les espaces de Hilbert.

5. Support d'une distribution:

Définition 14: On appelle <u>support</u> d'une distribution T le + petit ensemble fermé $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est $\subset K^c$, on ait $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Si le $\operatorname{supp} T = K$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$, T est dite <u>à support borné</u>.

Exemple: Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} f \subset K$, un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$, alors elle définit une distribution régulière tq:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_K f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Donc $\langle T_f, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K^c)$, ce qui prouve que T_f est une distribution avec $\operatorname{supp} T_f = K$.

Théorème 15: Soit T une distribution à support borné K. Alors:
i) Toutes les dérivées de T sont à support borné, et $\operatorname{supp} T^{(n)} \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
ii) Si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$ et $\alpha(x) = 1 \ \forall x \in K$, alors on a $T = \alpha T$.

III. Convergence dans $\mathcal{D}'$

Supposons qu'il existe une suite de distributions $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ définies $\forall \lambda$, où soit $\lambda \in [a,b]$, soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Alors, la suite numérique

$$a_\lambda(\varphi) := \langle T_\lambda, \varphi \rangle,$$

définie $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, est soit convergente, soit nonconvergente quand $\lambda \to \lambda_0 \in [a,b]$ (ou $\lambda \to +\infty$). Nous pouvons énoncer donc:

Définition 16: La suite de distributions T_λ converge vers la distribution T quand $\lambda \to \lambda_0$ (ou $\lambda \to +\infty$) si, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la suite numérique $a_\lambda(\varphi)$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

On utilisera la notation

$$\text{l.i.m.}_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda = T$$

pour indiquer la convergence d'une suite de distributions.

Remarques:

1) D'après cette définition, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, h = h(\varepsilon, \varphi)$:

$$|\langle T_\lambda - T, \varphi\rangle| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |\lambda - \lambda_0| < h(\varepsilon, \varphi),$$

mais il n'est pas demandé que h soit indépendant de φ. En d'autres termes, il s'agit d'une convergence simple, et non pas d'une convergence uniforme par rapport à l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

2) Supposons que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \lim_{\lambda\to\lambda_0} a_\lambda(\varphi) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle = a(\varphi)$$

Cette limite définit une forme sur $\mathcal{D}$, qui est clairement linéaire. Mais la convergence simple $\not\Rightarrow$, a priori, que cette limite soit continue, i.e. soit une distribution dans $\mathcal{D}'$. Néanmoins, on peut montrer (avec un effort considérable!) qu'il en est bien ainsi :

Théorème 17: Soit (T_λ) une suite de distributions. Si, quand $\lambda \to \lambda_0$, la suite de nombres $\langle T_\lambda, \varphi\rangle$ a une limite finie $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors la forme T définie par

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{\lambda\to\lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi\rangle \qquad (5)$$

De même, si (T_λ) est une suite de distributions tempérées et si, quand $\lambda \to \lambda_0$, la suite de nombres $\langle T_\lambda, \varphi\rangle$ a une limite finie $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

la forme linéaire définie par (5) est une distribution tempérée.

Remarque: Nous savons que, si une suite de fonctions dérivables (f_λ) converge vers une limite f, cette dernière n'est pas nécessairement dérivable et, même si elle est dérivable, la suite des dérivées (f'_λ) ne converge pas nécessairement vers f'. Voici donc l'intérêt de la propriété suivante des distributions:

Théorème 18: Si (T_λ) est une suite de distributions qui converge vers la distribution T quand $\lambda \to \lambda_0$, alors la suite des dérivées (T'_λ) converge vers T':

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}{}_{\text{l.i.m.}}\, T'_\lambda = T'.$$

Démonstration: Par la définition de la dérivée, nous avons

$$\langle T'_\lambda, \varphi\rangle = -\langle T_\lambda, \varphi'\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

et par hypothèse nous avons

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Donc: $\lim_{\lambda\to\lambda_0} \langle T'_\lambda, \varphi\rangle = -\lim_{\lambda\to\lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi'\rangle$

$$= -\langle T, \varphi'\rangle$$

$$= \langle T', \varphi\rangle \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to\lambda_0}{}_{\text{l.i.m.}}\, T'_\lambda = T'.$$

Le théorème s'étend à tous les ordres de dérivation. ∎

Convergence d'une suite de fonctions au sens des distributions

Supposons que (T_λ) soit une suite de distributions régulières définies par la suite de fonctions (f_λ). La convergence au sens des fonctions de la suite $(f_\lambda) \not\Rightarrow$ nécessairement la convergence de la suite (T_λ).

Définition 19: Si la suite de distributions régulières (T_λ), où T_λ est définie par la fonction f_λ, converge vers une distribution T lorsque $\lambda \to \lambda_0$, on dit que la suite (f_λ) converge vers T au sens des distributions, et on écrit

$$\underset{\lambda \to \lambda_0}{\text{l.i.m.}}\, f_\lambda = T.$$

Théorème 20: Si (f_n) est une suite de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui converge en norme vers f quand $n \to \infty$, alors la suite (f_n) converge, au sens des distributions tempérées, vers f.

Démonstration: Nous avons déjà vu que toute fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ définit une distribution tempérée. Par hypothèse,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = 0$$

En désignant par f et f_n les distributions tempérées définies par ces fonctions, on a, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle f_n - f, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f_n(x) - f(x))\varphi(x)\,dx\right|$$

$$\leq \int |f_n(x) - f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|_{L^2}\,\|\varphi\|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\langle f_n - f, \varphi\rangle| = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$\Rightarrow$ la suite (f_n) converge vers f au sens des distributions tempérées. ▨

Exemples:

1) Représentations de la distribution de Dirac:

Théorème 21: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.
Alors la suite de fonctions:

$$f_n(x-a) := n f(n(x-a))$$

converge au sens des distributions vers la distribution de Dirac δ_a quand $n \to \infty$:

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, f_n(x-a) = \delta_a$$

Remarque: On peut illustrer ce théorème par l'exemple de la suite de fonctions gaussiennes:

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{n^2}{2}(x-a)^2}$$

qui converge vers δ_a au sens des distributions:

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{n^2}{2}(x-a)^2} = \delta_a .$$

2) La distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$, notée $vp(\frac{1}{x})$

Théorème 22: La suite de fonctions $x/(x^2+\varepsilon^2)$ converge, quaud $\varepsilon \to 0$, vers une distribution tempérée appelée **valeur principale de $\frac{1}{x}$** et notée $vp(\frac{1}{x})$:

$$\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} \varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$
$$= \lim_{L \to 0} \int_{|x| \geq L} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Remarque: Il est évident que $1/x$ ne définit pas une distribution: elle n'est pas sommable au $\mathcal{V}(0)$. Mais on sait que l'intégrale

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

a un sens pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (et même si φ est à support borné, et $\varphi \in \mathcal{E}^1$).

On définit ainsi une forme linéaire. Cette forme est **continue:** En effet, supposons que $\varphi_j \xrightarrow[j \to \infty]{\mathcal{D}} 0$, et soit: $\operatorname{supp} \varphi_j \subset [-A, +A]$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$:

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx = \varphi_j(0)\, vp \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x} + vp \int_{-A}^{+A} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx$$

Le premier terme du second membre est nul (x^{-1} est impaire!). Dans le deuxième terme, on peut supprimer vp car l'intégrande est sommable au $\mathcal{V}(0)$, et la formule des accroissements finis:

$$\left| \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} \right| \leq \max |\varphi_j'| \Rightarrow \left| vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx \right| \leq 2A \max |\varphi_j'|$$

qui tend vers 0 quand $j \to \infty$ en vertu de la définition de la convergence des φ_j vers 0 dans l'espace $\mathcal{D}$. La distribution ainsi définie se note $vp(\frac{1}{x})$:

$$\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

IV. Convolution des distributions

L'opération de convolution trouve sa plus belle interprétation ainsi que son utilité pratique dans l'étude de la Transformation de Fourier.

En attendant, nous essayerons de donner sa définition pour les fonctions appartenant à différents espaces que nous avons rencontrés, ensuite nous étendrons la convolution aux distributions.

Théorème et Définition 23: Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors leur produit de convolution est défini par:

$$(5) \quad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy,$$

la fonction de y figurant sous le signe somme étant sommable pour presque tout x.

En outre, la fonction $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, & on a:

$$(6) \quad \|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Remarque: On peut démontrer que le produit de convolution est associatif: Si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on a:

$$(f*g)*h = f*(g*h) \quad \text{p.p.}$$

On montre d'abord (par Fubini) pour presque tout x, la fonction

$$(y,z) \longmapsto f(x-y)\,g(y-z)\,h(z)$$

est sommable dans $\mathbb{R}^{2n}$, et on calcule ensuite son intégrales de deux manières différentes.

Théorème 24: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, & soit g une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $f*g$ définie en tout point par (5) est continue et bornée. Si, de plus, les dérivées partielles (d'ordre 1, 2...) de g existent et sont continues et bornées, il en est de même pour $f*g$, et on a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f*g) = f*\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f*g) = f*\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots$$

Nous présentons un autre résultat (sans démonstration) sur deux cas où le produit de convolution est bien défini:

Théorème 25: (i) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors l'intégrale (5) est définie pour presque tout x. La fonction $f*g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, et on a:

$$\|f*g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$$

ii) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors l'intégrale (5) est définie pour tout x. La fonction $f*g$ est continue, bornée et tend vers 0 à l'infini. On a

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Que peut-on dire pour les <u>fonctions localement intégrables</u>? Si les fonctions sont telles que l'on n'ait à intégrer que sur un compact, alors la sommabilité sur tout compact pourra suffire pour définir le produit de convolution.

Nous commençons par les deux cas suivants, qui se ramènent sans grande difficulté au Théorème 23:

Théorème 26:

(i) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et soit $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nulle hors d'un compact K. Alors l'intégrale

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_K f(x-y)g(y)dy$$

est définie p.p. x et on a $f*g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Soient f et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à support limité à gauche, i.e. que l'on a $f(x)=0$ pour $x<a$, et $g(x)=0$ pour $x<b$. Alors l'intégrale

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \begin{cases} \int_b^{x-a} f(x-y)g(y)dy & \text{si } x \geq a+b \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est définie p.p. x et on a $f*g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Cherchons d'autres hypothèses qui peuvent nous permettre d'étendre la définition du produit de convolution aux distributions.

Supposons que $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, que leur produit de convolution soit défini p.p., et que, de plus:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\, g(t-x)\, \varphi(t)|\, dt < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Alors, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)\, g(t-x)\, \varphi(t)\, dt\, dx = \langle f*g, \varphi \rangle$$

est bien définie. On peut vérifier la linéarité et la continuité de cette forme sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ce qui prouve que le produit de convolution $f*g$ définit une <u>distribution régulière</u>.

De plus, en posant $t-x =: y$, on obtient, en appliquant le théorème de Fubini, la formule symétrique

$$\langle f*g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} dx\, f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, \varphi(x+y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} dx\, g(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \varphi(x+y)\, dy$$

que l'on peut écrire dans la notation des distributions comme suit:

$$\langle f*g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \langle g(x), \langle f(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \quad (8)$$

La définition du produit de convolution des distributions repose sur la <u>règle de Fubini</u>, qui étend aux distributions le théorème de Fubini, et que nous l'énoncerons sans la démonstration:

<u>Définition 27</u>: (Règle de Fubini)
Si S et T sont deux distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et si, pour une fonction $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, avec $x, y \in \mathbb{R}^n$, l'une des deux expressions

$$\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle \text{ ou } \langle T_x, \langle S_y, \langle \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

est définie, alors on a l'égalité

$$\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

On démontre que le produit de convolution de deux distributions, lorsqu'il est défini, se calcule en généralisant la formule (8):

<u>Théorème 28</u>: S'il existe une distribution $S*T$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, produit de convolution de deux distributions $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors,

$$(9)\quad \langle S*T, \varphi\rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

et ce produit est commutatif:

$$\langle S*T, \varphi\rangle = \langle T*S, \varphi\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle.$$

Il est important de noter que le produit de convolution ne peut pas être défini pour

deux distributions quelconques. En effet, posons

$$\Psi(x) := \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle .$$

Alors (9) s'écrit

$$\langle S*T, \varphi \rangle = \langle S, \Psi \rangle .$$

Pour que (9) ait un sens, il faut que Ψ soit une fonction pour laquelle le symbole $\langle S, \Psi \rangle$ soit défini.

Donc, pour que $\langle S, \Psi \rangle$ ait un sens $\forall S \in \mathcal{D}'$, il faut que $\Psi \in \mathcal{D}$.

Si $S \in \mathcal{E}'$, il suffit que $\Psi \in \mathcal{E}$ et, si S est une distribution à support borné, il suffit que $\Psi \in \mathcal{C}^\infty$ à support quelconque.

Nous pouvons citer le résultat suivant:

<u>Théorème 29</u>: Quels que soient $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$, la fonction

$$\Psi(x) = \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle = \langle \tau_{-x} T_y, \varphi(y) \rangle$$

est $\mathcal{C}^\infty$: $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\Psi^{(n)}(x) = (-1)^n \langle T_y^{(n)}, \varphi(x+y) \rangle = (-1)^n \langle \tau_{-x} T_y^{(n)}, \varphi(y) \rangle .$$

<u>Démonstration:</u> Supposons, pour simplifier les calculs, que $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit

$$\frac{\Psi(x+a) - \Psi(x)}{a} = \left\langle T_y, \frac{\varphi(x+y+a) - \varphi(x+y)}{a} \right\rangle$$

Puisque la forme T est continue,

$$\lim_{a \to 0} \frac{\Psi(x+a) - \Psi(x)}{a} = \left\langle T_y, \lim_{a \to 0} \frac{\varphi(x+y+a) - \varphi(x+y)}{a} \right\rangle$$

$$= \langle T_y, \varphi'(x+y) \rangle .$$

Donc $\Psi(x)$ est dérivable, et

$$\Psi'(x) = \langle T_y, \varphi'(x+y) \rangle = -\langle T_y, \varphi(x+y) \rangle$$

Puisque T est indéfiniment dérivable, on peut démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \Psi^{(n)}(x) = (-1)^n \langle T_y^{(n)}, \varphi(x+y) \rangle ,$$

et donc $\Psi \in \mathcal{C}^\infty$. ▨

Exemple: Produit de convolution $T * \delta_a^{(n)}$. Soit $\delta_a^{(n)}$ la dérivée $n^{ième}$ de la distribution de Dirac au point $x=a$. On peut montrer que le produit de convolution $T * \delta_a^{(n)}$ est défini $\forall T \in \mathcal{D}'$:

Théorème 30: $\forall T \in \mathcal{D}'$,

$$T * \delta_a^{(n)} = \delta_a^{(n)} * T = \tau_{-a} T^{(n)},$$

où $\tau_{-a} T^{(n)}$ est la translatée $-a$ de la dérivée $n^{ème}$ de T.

En particulier:

- $T * \delta_a = \delta_a * T = \tau_{-a} T$
- $(a=0)$ $T * \delta^{(n)} = \delta^{(n)} * T = T^{(n)}$ (11)
- $T * \delta = \delta * T = T$ (12)

On traduit la formule (12) en disant que δ est l'unité du produit de convolution.

Si on prend pour T la distribution δ_b :

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b} .$$